求解简单多边形间最小距离的一个线性时间算法

毛定山[1),2)]　崔先国[3)]　李　行[4)]　吴哲辉[2)]

[1)](中国科学研究院地理科学与资源研究所 资源与环境信息系统国家重点实验室,北京 100101)
[2)](山东科技大学 信息科学与工程学院,青岛 266510)
[3)](山东科技大学 地球信息科学与工程学院,青岛 266510)
[4)](华东师范大学 河口海岸学国家重点实验室,上海 200062)

摘　要　计算简单多边形间的最小距离,在所有与几何图形计算有关的领域中,一直以来都是一个基本问题。为了更快地求解简单多边形的最小距离,提出了一个基于关联多边形三角化分割的简单多边形间最小距离的求解算法。该算法的主要思想是:首先构造一个关联多边形把两个多边形联系起来,其目的是把最小距离限制在这个关联多边形内;然后根据两个多边形的最小边界矩形包围框间的不同位置关系,详细阐述了关联多边形的构造过程,同时论述了关联多边形是一个简单多边形。为了计算最小距离,首先要对关联多边形进行三角化分割,并使最小距离位于三角化分割结果中某一个三角形区域内,或者至多位于两个相邻三角形区域内;之后通过对所有三角形进行遍历来找出最小距离及其所在的位置。该算法的时间复杂度是线性的。

关键词　关联多边形　最小矩形包围框(MBR)　三角化分割

中图法分类号:TP391.41　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1006-8961(2008)12-2400-09

An Algorithm for Computing the Minimal Distance Between Two Polygons in Linear Time

MAO Ding-shan[1),2)], CUI Xian-guo[3)], LI Xing[4)], WU Zhe-hui[2)]

[1)](*State Key Laboratory of Resources and Environmental Information System Institute of Geographic Sciences and Natural Resources Research Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100101)
[2)](*College of Information Science and Engineering Shandong University of Science and Technology*, *Qingdao*, 266510)
[3)](*College of Earth Information Science and Engineering Shandong University of Science and Technology*, *Qingdao* 266510)
[4)](*State Key Laboratory of Estuarine and Coastal Research*, *East China Normal University*, *Shanghai* 200062)

Abstract　In computer graphics, spatial analysis of geographic information system (GIS) and computer aided design (CAD), a fundamental problem is to compute the minimal distance of two polygons. An efficient algorithm is presented for computing the minimal distance between two polygons based on the triangulation of their association polygon. The main idea of the algorithm is that two polygons were linked by an association polygon constructed, so that the minimal distance between two polygons is restricted within the association polygon. According to three different relationships between two polygon-boxes, the approach of constructing the association polygon is described in detail and the association polygon is proved to be a simple polygon. The association polygon is triangulated to find the minimal distance. As a result, the distance between a vertex and an edge within one or two adjacent triangles is the minimum. The time complexity of the algorithm is linear related to the size of the two polygons.

Keywords　association polygon, minimum bound rectangle(MBR), triangulation

基金项目:国家自然科学基金项目(40571129);国家重点基础研究发展计划(973)项目(2006CB701305)

收稿日期:2006-07-28;**改回日期**:2007-07-02

第一作者简介:毛定山(1982～　),男。汉。现为山东科技大学与中国科学院地理科学与资源研究所联合培养的计算机软件与理论专业硕士研究生。主要从事计算几何算法的研究及其应用,已在核心期刊上发表多篇论文。E-mail:mdssoft@sohu.com

1　引　言

在计算机图形学、机械设计、统计学、地理信息系统等与几何图形计算有关的领域中，很多问题都可以归结为求解简单多边形间的最小距离。关于几何对象间最小距离的研究，在计算几何领域一直以来都是一个基本问题[1]。对于简单多边形间最小距离的研究主要集中碰撞检测方面[2]，但专门对其进行研究的并不是很多。对于凸多边形和简单多边形间的最小距离，Chin 和 Wang Cao-an 提出了一个线性算法[3]，该算法是应用凸顶点的可视区域来搜索最近距离；针对多处理器，Nancy 提出了一个求解多边形间最小距离的并行算法[4]，其复杂度为 $O(n\log n)$，不过其实现起来比较复杂；对于任何可以分解为凸几何体的 3 维几何体，David 等人提出了一种基于包围盒层次树的求解几何体间最近距离的算法[5]；杨春成等人从多边形相似性关系出发，提出了用差别链配对的方法来计算多边形间的最小距离，但其算法的运算量很大，时间复杂度是 $O(nm)$（m，n 为两多边形的顶点个数）[6]；周之平等人提出了一种基于单调链的求解简单多边形间最小距离的算法，其核心思想是先对多边形的边沿坐标轴进行单调分割，之后根据可见性选择链对，再结合层次树理论和分支限界策略计算链对间的距离，以求解多边形间的最近距离，其时间复杂度是 $O(nM+mN)$（M、N 为两多边形单调链的个数，m、n 为两多边形的顶点个数）[7]。

但这些算法总是存在各种限制，或者其时间复杂度较大。是否存在一个可以在线性时间复杂度内计算出任意两个简单多边形间最小距离的算法？针对这个问题，本文从理论的角度证明了它是存在的，并且给出了一个可以在线性时间内计算出任意两个简单多边形间最小距离的算法。

2　多边形间的位置关系

多边形间的位置关系，可以简单地分为相离、相交、包含 3 种。在判断多边形间的位置关系时，有时候没必要根据多边形的形状来进行判断，因为计算多边形的位置关系本身就是一个复杂的过程。为了简化计算过程，可以根据多边形的其他相关信息来判断，例如可以利用多边形的凸包，甚至多边形的最小边界矩形包围框（minimum bound rectangle，MBR）等来代替这个多边形的形状，以达到简化计算的目的。所谓多边形的 MBR 是指：过多边形的最高点和最低点分别作一条水平直线，过最左点（即 X 坐标值最小的顶点）和最右点（即 X 坐标值最大的顶点）分别作一条竖直线，而 4 条直线相交得到的 4 个交点构成的矩形即为 MBR。矩形的 4 条边，分别称为上边、下边、左边，右边，由以上多边形的 MBR 定义可知，每条边上至少有一个多边形的顶点。本文采用 MBR 来代替多边形的形状（如图 1 所示），用来确定多边形间的位置关系，以简化两个多边形位置关系判断的计算过程。对于两个多边形的 MBR，它们之间的位置关系如图 2 所示，即分为相离、相交、包含 3 种。

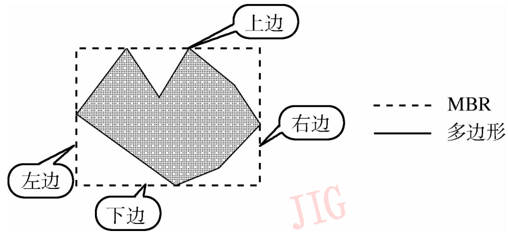

图 1　多边形的 MBR

Fig. 1　MBR of simple polygon

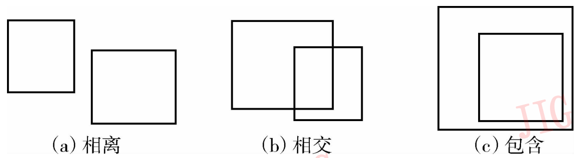

图 2　两个 MBR 的位置关系

Fig. 2　Position relation of between two MBRs

通过简单的比较，两个 MBR 之间的位置关系能够快速地被判断出来，现在就根据图 2 所示的 3 种位置关系，对两多边形间的位置关系进行分类。在计算两多边形各自的 MBR 之前，可以先过两个多边形的中心点作一条直线，称此直线为两多边形的中轴线；然后旋转平面，使中轴线水平。其目的是为了当两 MBR 相交时，便于区分左右关系。之后，再计算两个多边形各自的 MBR，并判断两 MBR 间的位置关系，然后根据不同的位置关系，分别进行处理。

3　关联多边形的构造

3.1　两个多边形的 MBR 相离

设多边形 $\boldsymbol{P}=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$（顶点按逆时

针顺序排列,下同),多边形 $\boldsymbol{P}$ 的 MBR 为 $\boldsymbol{B}^P$;多边形 $\boldsymbol{Q}=\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$,多边形 $\boldsymbol{Q}$ 的 MBR 为 $\boldsymbol{B}^Q$。在此不妨设多边形 $\boldsymbol{P}$ 中的最高顶点为 $v_{\max}$,也即是 Y 坐标值最大的顶点,最低顶点位 $v_{\min}$(图 3),即 Y 坐标值最小的顶点;多边形 $\boldsymbol{Q}$ 中的最高顶点为 $u_{\max}$,最低顶点为 $u_{\min}$(图 3)。对于最高顶点或者最低顶点,如果存在多个顶点,则取距离另一个多边形 MBR 中心最近的顶点。

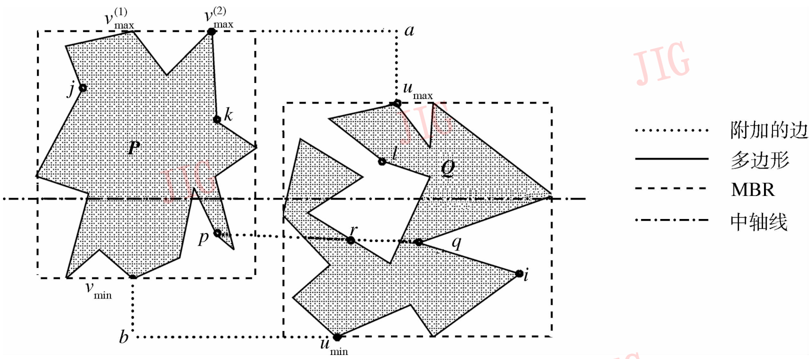

图 3 多边形 MBR 相离情况下关联多边形的构造示意图

Fig. 3 Construction diagram of association polygon in the case of no-intersection relation of two MBRs

最高顶点和最低顶点可以把多边形折线拆分为两条折线。如图 3 所示,从左到右看,一条折线在左边,一条折线在右边。对于左边折线上的任何一点 p(除最高点和最低点),则在右边折线上至少存在一个 Y 坐标等于点 p 的 Y 坐标,而 X 坐标大于点 p 的 X 坐标的点 q。只要过点 p 作一条水平直线,则此直线与右边的折线至少有一个交点,任取一个交点作为点 q 即可满足条件:点 q 的 Y 坐标值等于点 p 的 Y 坐标值,并且点 q 的 X 坐标值大于点 p 的 X 坐标值。

对于多边形 $\boldsymbol{P}$ 可以拆分为折线 $\boldsymbol{L}_1^P=\{v_{\max}, \cdots, j, \cdots, v_{\min}\}$(上角 $\boldsymbol{P}$ 代表多边形 $\boldsymbol{P}$,下同),$\boldsymbol{L}_2^P=\{v_{\min}, \cdots, p, \cdots, k, \cdots, v_{\max}\}$,由折线序列中最高顶点 $v_{\max}$ 和最低顶点 $v_{\min}$ 的先后关系可知,$\boldsymbol{L}_1^P$ 在左边,$\boldsymbol{L}_2^P$ 在右边;对于多边形 $\boldsymbol{Q}$ 可以拆分为 $\boldsymbol{L}_1^Q=\{u_{\max}, \cdots, l, \cdots, u_{\min}\}$,$\boldsymbol{L}_2^Q=\{u_{\min}, \cdots, i, \cdots, u_{\max}\}$,由折线序列中 $u_{\max}$ 和 $u_{\min}$ 的先后关系可知,$\boldsymbol{L}_1^Q$ 在左边,$\boldsymbol{L}_2^Q$ 在右边。不妨设 $\boldsymbol{B}^P$ 在 $\boldsymbol{B}^Q$ 的左边,即 $\boldsymbol{B}^P$ 的中心点的 X 坐标小于 $\boldsymbol{B}^Q$ 中心点的 X 坐标(如图 3 所示)。

引理 1 两个多边形的 MBR 相离时,两个多边形的最小距离在折线 $\boldsymbol{L}_2^P$ 与 $\boldsymbol{L}_1^Q$ 之间。

证明 如图 3 所示,假设有两个点 p 和 q(不是最高点或者最低点)不分别在 $\boldsymbol{L}_2^P$ 和 $\boldsymbol{L}_1^Q$ 上,则两个点间的距离是最小的,显然两个点不在同一个多边形上。若连接这两个点,则线段 pq 一定与 $\boldsymbol{L}_1^Q$ 相交,设交点为 r(如图 3 所示)。显然,点 r 在线段 pq 上,则点 p 和点 r 间的距离或者点 q 和点 r 间的距离一定小于点 p 和点 q 间的距离,所以假设是不成立的。同理,当点 p 和点 q 在其他位置时,也是不成立的。引理得证。

为了求 $\boldsymbol{L}_2^P$ 与 $\boldsymbol{L}_1^Q$ 之间的最小距离(如图 3 所示),需作 4 条附加的边:$av_{\max}$、$au_{\max}$、$bv_{\min}$、$bu_{\min}$。a 和 b 两点是按照以下规则得到的:在 $v_{\max}$ 和 $u_{\max}$ 中,过 Y 坐标值大的点(即较高的点)作一条水平线,过 Y 坐标值小的点(即较低的点)作一条竖直线,两直线的交点是点 a;在 $v_{\min}$ 和 $u_{\min}$ 中,过 Y 坐标值大的点(即较高的点)作一条竖直线,过 Y 坐标值小的点(即较低的点)作一条水平线,两直线的交点是点 b,并由此构造一个多边形 $\hat{\boldsymbol{P}}=\{v_{\max}, \cdots, k, \cdots, v_{\min}, b, u_{\min}, \cdots, l, \cdots, u_{\max}, a\}$,称此多边形为关联多边形。显然关联多边形 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 是一个简单多边形,因为 $\boldsymbol{L}_2^P$ 与 $\boldsymbol{L}_1^Q$ 是不相交的,故附加的边和它们也不相交(端点处相交除外)。因为关联多边形的边界包含了 $\boldsymbol{L}_2^P$ 与 $\boldsymbol{L}_1^Q$,所以两多边形间的最小距离是关联多边形中(除附加边和附加顶点外)某个顶点到边的距离。

一个点到一个边(即线段)的距离是指:过这个点作一条垂直于这条边的垂线,如果垂足位于边上,则点到垂足的距离就是这个点到边的距离;如果垂足位于边的延长线上时,则以点到边的两个端点距离中的较小距离作为这个点到边的距离。

3.2 两个多边形的 MBR 相交

对于 MBR 相交的情况,可以进一步细分为如图 4 所示的两种。

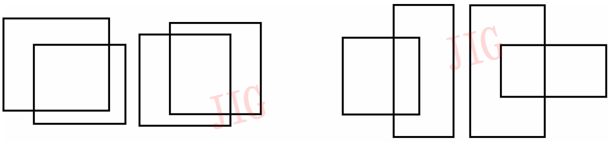

图 4　两 MBR 相交的两种情况

Fig. 4　The case of two MBRs intersection

3.2.1　两个 MBR 上下关系

两个 MBR 是上下关系,其是指:一个 MBR 的上边不低于另一个 MBR 的上边,并且其下边也不低于另一个 MBR 的下边。多边形 $\boldsymbol{P}$ 的 MBR 是 $\boldsymbol{B}^P$,多边形 $\boldsymbol{Q}$ 的 MBR 是 $\boldsymbol{B}^Q$。不妨假设,$\boldsymbol{B}^P$ 在 $\boldsymbol{B}^Q$ 的左边,即 $\boldsymbol{B}^P$ 的中心点 X 坐标值小于 $\boldsymbol{B}^Q$ 的中心点的 X 坐标值,并且 $\boldsymbol{B}^P$ 的上边和下边分别高于 $\boldsymbol{B}^Q$ 的上边和下边(如图 5 所示)。

构造关联多边形时,先从多边形 $\boldsymbol{P}$ 的最高点中找出一个距离 $\boldsymbol{B}^Q$ 的右边最近的点(如图 5 中的点 e);之后,从 $\boldsymbol{B}^Q$ 的上边和右边上寻找属于多边形 $\boldsymbol{Q}$ 的顶点(如图 5 中的点 c、c_1、c_2),且它们位于 $\boldsymbol{B}^P$ 外(如图 5 中的点 c、c_1),如果不止一个,则取距离点 e 最近的点(如图 5 中的 c 点);最后过点 e 作一条水平直线,过 c 点作一条竖直线,两直线的交点为 a。

构造关联多边形时,先从多边形 $\boldsymbol{Q}$ 的最低点中找出一个距离 $\boldsymbol{B}^P$ 左边最近的点(如图 5 中的点 f);之后,从 $\boldsymbol{B}^P$ 的下边和左边上寻找属于多边形 $\boldsymbol{P}$ 的顶点(如图 5 中的点 d、d_1、d_2),且它们位于 $\boldsymbol{B}^Q$ 外(如图 5 中的点 d、d_2),如果不止一个,则取距离点 f 最近的点(如图 5 中的点 d);最后过点 f 作一条水平直线,过点 d 作一条竖直线,两直线的交点为 b。

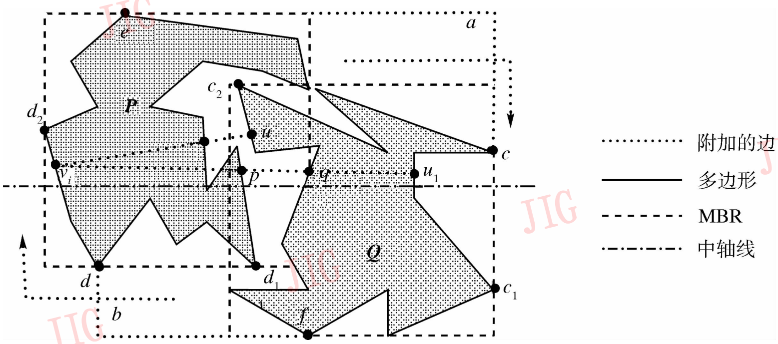

图 5　两个 MBR 上下关系时关联多边形的构造示意图

Fig. 5　Construction diagram of association polygon in the case of the up-down relation of two MBRs

若据此构造一个多边形 $\hat{\boldsymbol{P}} = \{a, e, \cdots, d_1, \cdots, s, b, f, \cdots, c_2, \cdots, c\}$,则称为关联多边形。因为附加的边(即边 ae,ac,bd,bf)与多边形 $\boldsymbol{P}$ 或者 $\boldsymbol{Q}$ 不相交(端点处相交除外),并且多边形 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 是不相交的,所以关联多边形 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 是一个简单多边形。

引理 2　以上多边形 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 间的最小距离位于关联多边形 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 内,即 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 中存在一个顶点到边(附加的边除外)的距离是两多边形的最小距离。

证明　假如两多边形间的最小距离不是关联多边形 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 中一个顶点到边的距离,同时假设一个顶点 v_i 在关联多边形 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 外,且在多边形 $\boldsymbol{P}$ 上,则到多边形 $\boldsymbol{Q}$ 的一条边 $\boldsymbol{l}_i$ 的距离是两个多边形间的最小距离。

如果边 $\boldsymbol{l}_i$ 属于关联多边形 $\hat{\boldsymbol{P}}$,即在边 $\boldsymbol{l}_i$ 上存在一点 u,使得点 u 和点 v_i 间距离是点 v_i 到边 $\boldsymbol{l}_i$ 的距离。如果连接点 u 和点 v_i 两点,则由约旦曲线定理可知,线段 uv_i 一定与关联多边形 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 区域的边界和多边形 $\boldsymbol{P}$ 区域边界的公共边界相交,即存在一个交点位于线段 uv_i 上,并且同时也位于多边形 $\boldsymbol{P}$ 的边界上,则这个交点与点 u 间的距离小于点 u 和点 v_i 间的距离(如图 5 所示)。

如果边 $\boldsymbol{l}_i$ 不属于关联多边形 $\hat{\boldsymbol{P}}$,在边 $\boldsymbol{l}_i$ 上存在一点 u_1,使得点 u_1 和点 v_i 间距离是点 v_i 到边 l_i 的距离。如果连接点 u_1 和点 v_i 两点,则由约旦曲线定理可知,线段 u_1v_i 与多边形 $\boldsymbol{P}$ 区域和关联多边形 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 区域的公共边界一定相交,任取一个交点 p,由于多边形 $\boldsymbol{Q}$ 区域与关联多边形 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 区域相邻,因此可以看作是一个区域;多边形 $\boldsymbol{Q}$ 区域和关联多边形 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 区域的公共边界一定与线段 u_1v_i 相交,可任取一个交点 q,由于多边形 $\boldsymbol{P}$ 区域与关联多边形 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 区域相邻,故它们可以看作是一个多边形区域,应用约旦曲线定理可知,显然,点 p 和点 q 间的距离小于点 u_1 和点 v_i 间的距离(如图 5 所示)。

所以假设是不成立的,引理得证。

3.2.2 一个 MBR 在另一个 MBR 的正右边

所谓一个多边形的 MBR 在另一个多边形的 MBR 的正右边,在此是指一个 MBR 的上边不低于另一个 MBR 的上边,并且其下边不高于另一个 MBR 的下边。不妨设多边形 $\boldsymbol{P}$ 的 MBR(记为 $\boldsymbol{B}^P$)的上边高于多边形 $\boldsymbol{Q}$ 的 MBR(记为 $\boldsymbol{B}^Q$)的上边,而 $\boldsymbol{B}^P$ 的下边低于 $\boldsymbol{B}^Q$ 的下边,并且 $\boldsymbol{B}^P$ 在 $\boldsymbol{B}^Q$ 的左边,即 $\boldsymbol{B}^P$ 中心点的 X 坐标值小于 $\boldsymbol{B}^Q$ 中心点的 X 坐标值(如图 6 所示)。

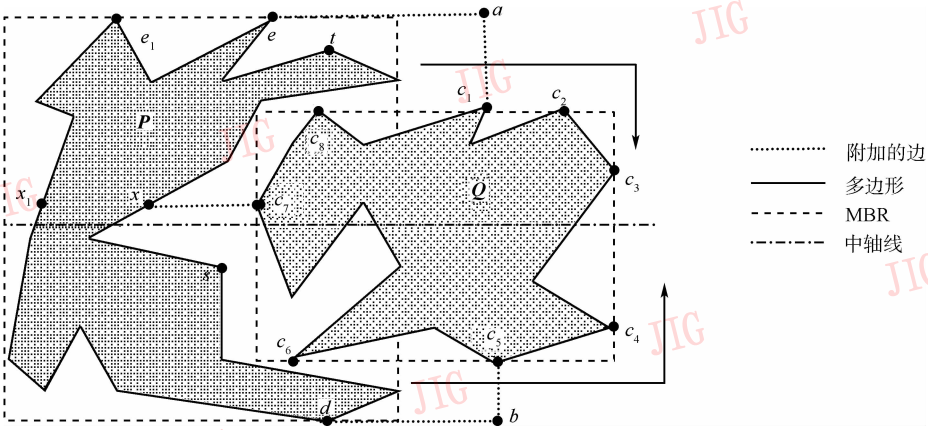

图 6 两 MBR 正左右相交时多边形的构造示意图

Fig. 6 Construction diagram of association polygon in the case of left-right intersection of two MBRs

构造关联多边形时,先从 $\boldsymbol{B}^P$ 的上边上,找出一个属于多边形 $\boldsymbol{P}$ 的顶点(也是最高点,如图 6 中的点 e、e_1),并且它到 $\boldsymbol{B}^Q$ 的右边的距离最近(如图 6 中的点 e),再过这个点(即点 e)作一条水平直线;而从 $\boldsymbol{B}^Q$ 的上边和右边上,则先找出一个属于多边形 $\boldsymbol{Q}$ 的,且在 $\boldsymbol{B}^P$ 外的顶点(如图 6 中 c_1,c_2、c_3、c_4),并且它到点 e 的距离最近(即如图 6 中的点 c_1),然后过这个点(即点 c_1)作一条竖直线,将两条直线的交点记为 a。

然后从 $\boldsymbol{B}^P$ 下边上,先找出一个属于多边形 $\boldsymbol{P}$ 的顶点(也就是最低点,如图 6 中的点 d),它到 $\boldsymbol{B}^Q$ 右边距离最近(如图 6 中的点 d),再过这个点(即点 d)作一条水平直线;从 $\boldsymbol{B}^Q$ 的下边和右边上,先找出一个属于多边形 $\boldsymbol{Q}$ 的,且在 $\boldsymbol{B}^P$ 外的顶点(如图 6 中的点 c_3、c_4、c_5),并且它到点 d 的距离最近(即图 6 中的点 c_5),再过这个点(即点 c_5)作一条竖直线,将两条直线的交点记为 b。

最后从 $\boldsymbol{B}^Q$ 的左边(即在 $\boldsymbol{B}^P$ 内的边)上任取一个属于多边形 $\boldsymbol{Q}$ 的点(如图 6 中的点 c_7),若过这一点(即点 c_7)向左作一条射线,则射线一定与多边形 $\boldsymbol{P}$ 相交,再从交点(如图 6 中的点 x、x_1)中找出一个距离这一点(即点 c_7)最近的交点,记为 x。

设存在两个关联多边形 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{Q}}$,$\hat{\boldsymbol{P}} = \{e, \cdots, t, \cdots, x, c_7, \cdots, c_8, \cdots, c_1, a\}$、$\hat{\boldsymbol{Q}} = \{b, c_5, \cdots, c_6, \cdots, c_7, x, \cdots, s, \cdots, d\}$(边界顶点按逆时针顺序排列),则称这两个多边形是关联多边形。显然这两个关联多边形都是简单多边形,因为,由以上描述可知,附加的边(即边 ae,ac_1,bd,bc_5,c_7x)与两个多边形 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 都不相交(端点处相交除外),而且两个多边形是不相交的。

引理 3 以上多边形 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 间的最小距离位于关联多边形 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 或者 $\hat{\boldsymbol{Q}}$ 内,即关联多边形 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 或者 $\hat{\boldsymbol{Q}}$ 中存在一个顶点到边(除附加的边外)的距离是两多边形的最小距离。

同引理 2 证明过程情况一样。

3.3 两个多边形的 MBR 包含关系

当两个多边形的 MBR 是包含关系时,不妨设多边形 $\boldsymbol{Q}$ 的 MBR(记为 $\boldsymbol{B}^Q$)在多边形 $\boldsymbol{P}$ 的 MBR(记为 $\boldsymbol{B}^P$)内,$\boldsymbol{B}^P$ 由中心点向外把其面积放大一倍,即由中心点向外偏移,变成如图 7 中的矩形 $r_1r_2r_3r_4$。

如果过多边形 $\boldsymbol{P}$ 的任一最高点(如图 7 中的点 p_1)向上作一条射线与矩形 $r_1r_2r_3r_4$ 交于点 a;过多边形 $\boldsymbol{P}$ 的任一最左点(即 X 坐标值最小的顶点,如图 7 中的点 p_2)向左作一条射线与矩形 $r_1r_2r_3r_4$ 交于点 b;过多边形 $\boldsymbol{P}$ 的任一最低点(如图 7 中的点 p_3)向下作一条射线与矩形 $r_1r_2r_3r_4$ 交于点 c;过多边形 $\boldsymbol{P}$ 的任一最右点(如图 7 中的点 p_4)向右作一条射线与矩形 $r_1r_2r_3r_4$ 交于点 d,则从图 7 上可以

看出，矩形 $r_1r_2r_3r_4$ 区域被分割成以下 5 个区域：$\boldsymbol{R}_1 = \{a, r_1, b, p_2, \cdots, p_i, \cdots, p_1\}$、$\boldsymbol{R}_2 = \{b, r_2, c, p_3, p_j, \cdots, p_k, \cdots, p_2\}$、$\boldsymbol{R}_3 = \{c, r_3, d, p_4, \cdots, p_m, \cdots, p_3\}$、$\boldsymbol{R}_4 = \{d, r_4, a, p_1, \cdots, p_n, \cdots, p_4\}$以及多边形 $\boldsymbol{P}$ 的区域（边界顶点都按逆时针顺序排列）。

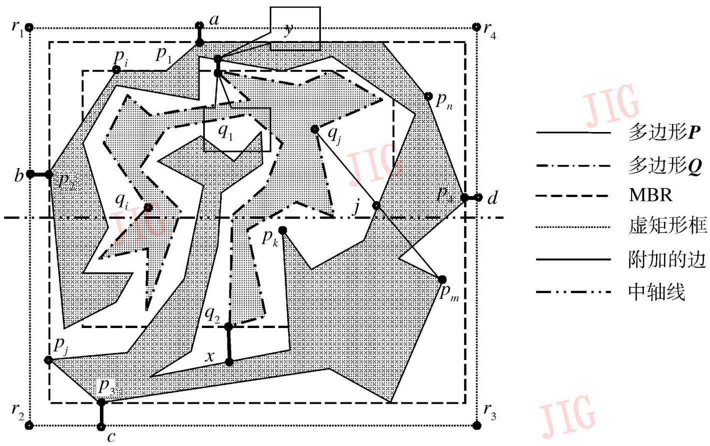

图 7　两 MBR 相互包含时多边形的构造示意图

Fig. 7　Construction diagram of association polygon in the case of included relation of two MBRs

引理 4　在以上情况下，多边形 $\boldsymbol{Q}$ 在区域 $\boldsymbol{R}_1$、$\boldsymbol{R}_2$、$\boldsymbol{R}_3$ 或者 $\boldsymbol{R}_4$ 中的某一个区域内部。

证明　对这 4 个区域边界进行分析可知，这 4 个区域的边界是由多边形 $\boldsymbol{P}$ 的边界和位于 $\boldsymbol{B}^P$ 外的边界两部分组成。现在假设多边形 $\boldsymbol{Q}$ 的区域跨越多个区域，即与多个区域有重叠部分，则这些区域一定彼此相邻，因为区域是连通的，区域只是对平面的一种分割。取任意两个相邻的区域 $\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$，多边形 $\boldsymbol{Q}$ 的区域和这两个区域的公共（即重叠）区域分别记为 $\boldsymbol{R}_1^c$ 和 $\boldsymbol{R}_2^c$，显然这两个区域都在多边形 $\boldsymbol{Q}$ 的区域内。从区域 $\boldsymbol{R}_1^c$ 和 $\boldsymbol{R}_2^c$ 中分别取两个点，由区域的连通性和约旦曲线定理可知，如果多边形 $\boldsymbol{Q}$ 的区域内一定存在与公共边界相交的曲线把这两个点连接起来，那么交点也一定在多边形 $\boldsymbol{Q}$ 的区域内，且交点也属于区域 $\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$ 的公共边界，这样便产生了矛盾，因为多边形 $\boldsymbol{Q}$ 与 $\boldsymbol{P}$ 不相交，所以两个区域不会存在公共点，也就是交点一定是 $\boldsymbol{B}^P$ 外的点，而 $\boldsymbol{B}^Q$ 在 $\boldsymbol{B}^P$ 的内部，这显然是不可能的，可见假设是不成立的，即多边形 $\boldsymbol{Q}$ 的内部区域（包含边界）一定只属于这 4 个区域中的某一个区域。

现在，若先过多边形 $\boldsymbol{Q}$ 的任一最高点（如图 7 中的点 q_1）向上作一条射线，则该射线可能与多边形 $\boldsymbol{P}$（的边界）或者矩形 $r_1r_2r_3r_4$ 的边界相交，若取距离这个点（q_1）最近的交点（如图 7 中的点 y）；再过多边形 $\boldsymbol{Q}$ 的任一最低点（如图 7 中的点 q_2）向下作一条射线，则该射线可能与多边形 $\boldsymbol{P}$ 的边界或者矩形 $r_1r_2r_3r_4$ 的边界相交，先取距离这个点（q_2）最近的交点（如图 7 中的点 x）；然后连接点 y 和点 q_1、点 x 和 q_2，即边 yq_1 和 xq_2 是附加边。

由以上叙述可知，多边形 $\boldsymbol{Q}$ 属于某一个区域的内部（如图 7 所示，多边形 $\boldsymbol{Q}$ 属于区域 $\boldsymbol{R}_2$），则附加边（即线段 yq_1 和 xq_2）和多边形 $\boldsymbol{Q}$ 的边界把区域 $\boldsymbol{R}_2$ 分割为两个区域。为了得到这两个区域的边界，可以做以下处理，即把多边形 $\boldsymbol{Q}$ 的顶点按顺时针排列，并从两个顶点 q_1 和 q_2 把多边形 $\boldsymbol{Q}$ 边界分割成两条折线 $\boldsymbol{L}_1^Q = \{q_2, \cdots, q_i, \cdots, q_1\}$ 和 $\boldsymbol{L}_2^Q = \{q_1, \cdots, q_j, \cdots, q_2\}$（按顺时针顺序排列）；从点 q_1 和 q_2 的先后顺序可知，折线 $\boldsymbol{L}_1^Q$ 在折线 $\boldsymbol{L}_2^Q$ 的左边，同时，区域 $\boldsymbol{R}_2$ 的边界也被两个点 x 和 y 分割成两条折线 $\boldsymbol{L}_1^R = \{y, \cdots, p_2, b, r_2, c, p_3, p_j, x\}$ 和 $L_2^R = \{x, \cdots, p_k, \cdots, y\}$（按逆时针顺序排列），从 x 和 y 两个点的先后顺序可知，L_1^R 在 L_2^R 的左边。若把左边的两条折线 $\boldsymbol{L}_1^Q$ 和 $\boldsymbol{L}_1^R$ 连接起来，并把右边的两条折线 $\boldsymbol{L}_2^Q$ 和 $\boldsymbol{L}_2^R$ 连接起来，即构造出两个多边形：$\hat{\boldsymbol{P}} = \{y, \cdots, p_2, b, r_2, b, p_3, p_j, x, q_2, \cdots, q_i, \cdots, q_1\}$，$\hat{\boldsymbol{Q}} = \{x, \cdots, p_k, \cdots, y, q_1, \cdots, q_j, \cdots, q_2\}$（按逆时针排列），则这两个多边形称为关联多边形。

引理 5　以上多边形 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 间的最小距离位于关联多边形 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 或者 $\hat{\boldsymbol{Q}}$ 内，即关联多边形 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 或者 $\hat{\boldsymbol{Q}}$ 中存在一个顶点到边（附加的边除外）的距离是两多边形的最小距离。

证明　从两个多边形区域（包含边界）上分别

取两个点，假定这两个点间的距离等于两个多边形区域间的最小距离，则这条以这两个点为端点的线段（两端点除外）肯定在两个多边形区域（包含边界）的外部，如果边上存在某个点在某个多边形区域内（包含边界），显然，这个点和另一个多边形区域（包含边界）内的，此线段的另一个端点间的距离就小于此线段的长度，这样这条线段就不是多边形间的最小距离，所以除端点外，线段上的任何一点都在两个多边形区域（包含边界）外。

现在，对这里的关联多边形 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{Q}}$ 进行分析，假如两多边形间的最小距离不是关联多边形 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 或者 $\hat{\boldsymbol{Q}}$ 中某个顶点到边的距离，而是多边形 $\boldsymbol{P}$ 的其他边界（不属于关联多边形 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 或者 $\hat{\boldsymbol{Q}}$）上的点 p_m 到多边形 $\boldsymbol{Q}$ 的距离，即多边形 $\boldsymbol{Q}$ 上存在一个点 q_j，则这两个点间的距离就是两多边形间的最小距离。连接点 q_j 和 p_m 由约旦曲线定理可知，若区域（指关联多边形 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 或者 $\hat{\boldsymbol{Q}}$ 区域）外的一点（指点 p_m）和区域（指多边形 $\boldsymbol{Q}$ 区域）内的一点（如图 7 中的点 q_j）的连线肯定与区域（指多边形 $\boldsymbol{Q}$ 区域和关联多边形 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 或者 $\hat{\boldsymbol{Q}}$ 区域）的边界相交（如图 7 中的交点 j），则这个交点（即点 j）到 q_j 的距离一定比整个边（指边 q_jp_m）的长度小，所以假设是不成立的，即多边形 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 间的距离是关联多边形 $\hat{\boldsymbol{P}}$ 或者 $\hat{\boldsymbol{Q}}$ 中某个顶点到边的距离，引理得证。

4 关联多边形中最小距离的求解

为了求出关联多边形中两个多边形 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 间的最小距离，本文把关联多边形进行三角化分割，图 8 所示的就是图 7 中构造的一个关联多边形被三角化分割后的结果。

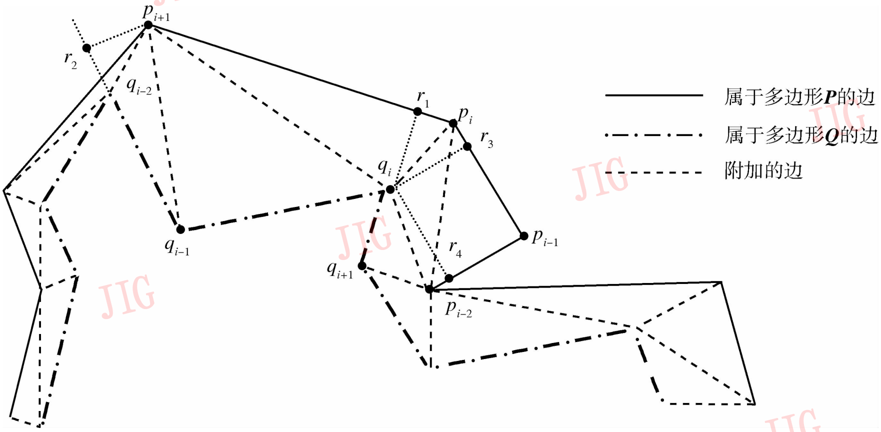

图 8 关联多边形的三角化分割

Fig. 8 Triangulation of association polygon

采用 Chazelle 提出的简单多边形三角化分割算法[8]或者 Amato 等人提出的随机算法[9]对关联多边形进行三角化分割时，两个算法在最坏情况下的时间复杂度被证明都是线性的。现在，任取其中一个属于多边形 $\boldsymbol{Q}$ 的顶点 q_i 来对其所属的三角形进行分析，从图 8 可以看出，q_i 所属的三角形分别是 $\triangle p_{i+1}q_{i-1}q_i$、$\triangle p_{i+1}q_ip_i$、$\triangle p_iq_ip_{i-2}$、$\triangle q_iq_{i+1}p_{i-2}$。若附加的顶点暂且不考虑，则对于任何一个三角形的 3 个顶点只有以下 2 种情况：第 1 种情况，3 个顶点同时属于一个多边形（$\boldsymbol{P}$ 或者 $\boldsymbol{Q}$）；第 2 种情况，3 个顶点中有一个属于多边形 $\boldsymbol{P}$（或者 $\boldsymbol{Q}$），另外 2 个属于另一个多边形 $\boldsymbol{Q}$（或者 $\boldsymbol{P}$）。对于第 1 种情况可不用考虑。现在就第 2 种情况进行详细分析：

（1）如果在一个三角形中，两个顶点属于同一个多边形，且两个点对应的边也是这个多边形的边（如图 8 中的 $\triangle p_{i+1}q_ip_i$），且 q_i 属于多边形 $\boldsymbol{Q}$，其他 2 个顶点 p_{i+1} 和 p_i 属于多边形 $\boldsymbol{P}$，并且边 $p_{i+1}p_i$ 也属于多边形 $\boldsymbol{P}$，则过点 q_i 作边 $p_{i+1}p_i$ 的垂线，垂足为 r_1，r_1 在边 $p_{i+1}p_i$ 上，显然如果线段 q_ir_1 的长度是点 q_i 到边 $p_{i+1}p_i$ 的距离，则这个距离可能成为两个多边形 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 间的最小距离，记录下这个距离；如果垂足 r_1 不在边 $p_{i+1}p_i$ 上时，例如在 $\triangle p_{i+1}q_{i-1}q_{i-2}$ 中，点 p_{i+1} 属于多边形 $\boldsymbol{P}$，而其他两个顶点 q_{i-1} 和 q_{i-2} 属于多边形 $\boldsymbol{Q}$，并且边 $q_{i-1}q_{i-2}$ 也属于多边形 $\boldsymbol{Q}$，则过点 p_{i+1} 作边 $q_{i-1}q_{i-2}$ 的垂线，垂足为 r_2；但如果点 r_2 不在边 $q_{i-1}q_{i-2}$ 上，则点 p_{i+1} 到边

$q_{i-1}q_{i-2}$的距离就是点 p_{i+1}到点 q_{i-2}间的距离或者点 p_{i+1}到点 q_{i-1}间的距离中的较小值,记录下这个较小值,这个较小值可能成为两个多边形 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 间的最小距离。

(2)如果在三角形中,两个顶点属于同一个多边形,但两个点对应的边不是这个多边形的边(如图 8 中的$\triangle p_iq_ip_{i-2}$),则不妨假设点 q_i 属于多边形 $\boldsymbol{Q}$,而其他两个顶点 p_i 和 p_{i-2}属于多边形 $\boldsymbol{P}$,即边 p_ip_{i-2}不属于多边形 $\boldsymbol{P}$,它可能是关联多边形在三角化分割过程中附加的边或者是关联多边形构造过程中附加的边。当搜索一个与$\triangle p_iq_ip_{i-2}$相邻的三角形,且它与$\triangle p_iq_ip_{i-2}$的公共边是 p_ip_{i-2}(如图 8 中的$\triangle p_ip_{i-2}p_{i-1}$)时,由于边 p_ip_{i-1}和边 $p_{i-1}p_{i-2}$是多边形 $\boldsymbol{P}$ 的边,因此如果计算得到点 q_i 到边 p_ip_{i-1}的距离和点 q_i 到边 $p_{i-1}p_{i-2}$的距离,则两个距离中的较小值可能成为两个多边形 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 间的最小距离,记录下这个较小值;假设这时候边 p_ip_{i-1}(或者边 $p_{i-1}p_{i-2}$)不是多边形 $\boldsymbol{P}$ 的边,则计算两个点 q_i 和 p_i 间(或者 q_i 和 p_{i-2}间)的距离用于代替点 q_i 到边 p_ip_{i-1}(或者点 q_i 到边 $p_{i-1}p_{i-2}$)的距离,并记录下两个值中的较小值。如果这样的三角形(即$\triangle p_ip_{i-2}p_{i-1}$)不存在,则计算两个点 q_i 和 p_i 间的距离和点 q_i 和 p_{i-2}间的距离,并记录下两个值中的较小值。

对于特殊的三角形,如果三角形中某一个顶点是附加的,则顶点不可能多于一个,因为任何一个简单多边形,从最高点到最低点至少有一条边可将其连接起来。如果另外两个顶点属于同一个多边形,则不用考虑;如果这两个顶点分别属于两个多边形,则只计算这两个点间的距离,这个距离也有可能成为两个多边形间的最小距离,应把它记录下来。

对关联多边形三角化分割结果中的所有三角形进行遍历,其中三角形的个数为 $N-2$ 个(N 为关联多边形的顶点个数)[10]。因此,可以先在线性时间内遍历所有三角形,之后通过比较每个三角形中记录下来的距离来找出最小值,并记录下所在的对应位置。

引理 6　在以上情况下得到的最小值是两个多边形间的最小距离。

证明　由于两个多边形间的最小距离一定是一个多边形中的某一个顶点到另一个多边形中的某条边的距离,即一个多边形中存在一个顶点 p,它和另一个多边形边上的一个点 r(可能是顶点)间的距离就是两个多边形的最小距离,因此显然,线段 pr(除两端点 p、r 外)不与两多边形相交,即它位于两个多边形区域的外部。对于与两多边形所对应的关联多边形,由以上分析可知,线段 pr 一定在关联多边形的内部,这也是构造关联多边形的一个重要目的。可以进一步得到,线段 pr 是位于关联多边形三角化分割中某一个三角形区域的内部,或者至多位于两个相邻三角形区域的内部,否则,由多边形三角化分割可知[10],此关联多边形的三角化分割不是合法的,或者由多边形的三角化分割算法可知[8,9],显然这也是不成立的。根据以上描述,由于计算过程遍历了所有三角形,所以不可能把存在最小距离的位置遗漏掉,即由于把线段 pr 所位于的一个三角形或者两个相邻三角形区域遍历了,因此,记录下来的最小值就是两个多边形间的最小距离。引理得证。

计算两个多边形间的最小距离的算法步骤如下:

输入:以逆时针方向表示的两个多边形的顶点数据

输出:两个多边形间的最小距离及其对应位置

(1)计算两个多边形各自的中心点坐标;

(2)旋转平面使过两中心点的直线水平;

(3)计算两个多边形对应的 MBR;

(4)判断两 MBR 间的位置关系;

(5)根据两 MBR 间的位置关系构造关联多边形;

(6)对关联多边形进行三角化分割;

(7)遍历所有三角形,查找可能成为最小距离的位置,计算并记录下这个距离及其位置;

(8)比较所有可能成为最小距离的值,找出最小值;

(9)输出两个多边形间最小距离值及其所在的位置;

(10)结束。

通过对以上的计算过程进行的分析可知,每个过程计算的时间复杂度都是线性的(即与两个多边形的顶点个数成线性关系),再结合以上的各个引理,就可以得到以下定理:

定理　两个简单多边形间的最小距离可以在线性时间内计算出来。

5　结　论

从以上分析可知,该算法的关键是如何构造

一个关联多边形,以便把两个多边形间的最小距离限制在这个关联多边形内部,并使关联多边形的在三角化分割后,最小距离位于某一个三角形区域内,或者至多位于两个相邻三角形区域内,这样就可以在遍历所有三角形之后,找出最小距离。本文在找出最小距离时,主要借助了约旦曲线定理和目前成熟的简单多边形三角化分割算法,即在论述关联多边形是一个简单多边形时,主要应用了约旦曲线定理;而应用简单多边形三角化分割算法,则为了对关联多边形进行三角化分割,以降低算法的时间复杂度,并且保证最小距离位于某一个三角形区域内,或者至多位于两个相邻三角形区域内。在构造关联多边形时,本文分别从两多边形 MBR 间的相离、相交、包含等 3 种位置方面进行了详细分析,并先对两个多边形(区域)的(边界)封闭折线进行了拆分,之后进行巧妙的组合,从而构造出了关联多边形,这不仅保证了关联多边形是一个简单多边形,而且为接下来的多边形三角化分割提供了基础。

本文主要的贡献在于首次提出了任意两个简单多边形间的最小距离可以在线性时间内计算出来,并且给出了具体的算法;其不足之处是关联多边形的构造过程非常复杂,甚至添加了顶点和边;还有在论述所构造的关联多边形是一个简单多边形时,所用到的相关几何性质,有些没有得到充分的、严密的证明。觉得遗憾的是:对于 Chazelle 提出的简单多边形三角化分割算法[8],或者通过 Amato 等人提出的随机算法[9],它们在代码实现上都比较困难,本文尚未能有效解决,可能下一步的工作就是如何通过设计好的数据结构来真正实现本算法。同时,作者希望通过进一步地深入研究,能够不需要通过关联多边形的三角化过程,而是根据两个多边形间的位置关系,即能在线性时间内直接找出两个简单多边形间的最小距离所在的位置。

参考文献(References)

1 Windmyer P, Wu Y, Wong C. Distance problems in computational geometry with fixed orientions[A]. In: Proceedings of The First ACM Symposium on Computational Geometry[C], Baltimore, Maryland, USA, 1985: 186 ~ 195.

2 Wang Zhi-qiang, Hong Jia-zhen, Yang Hui. A survey of collision detection problem[J]. Journal of Software, 1999, **10**(5): 545 ~ 551. [王志强,洪嘉振,杨辉. 碰撞检测问题研究综述[J]. 软件学报, 1999, **10**(05): 545 ~ 551.]

3 Chin Y L, Wang Cao An. Optimal algorithms for the intersection and the minimum distance problems between planar polygons[J]. IEEE Transactions on Computers, 1983, **32**(12): 1203 ~ 1207.

4 Nancy M A. Determining the separation of simple polygons[J]. Journal of Computational Geometry and Applications, 1994, **4**(4): 457 ~ 474.

5 David E J, Elaine C. Minimum Distance Queries for Polygonal and Parametric Models[R]. Technical Report UUCS2972003, University of Utah, Salt Lake Citg, Utah, USA, 1997.

6 Yang Chun-cheng, Zhang Qing-pu, Tian Xiang-chun, *et al*. A closest distance computation method for simple polygons considering geometry shape similarity[J]. ACTA Geodaetica et Cartographica Sinica, 2000, **32**(4): 311 ~ 318. [杨春成,张清浦,田向春等. 顾及几何形状相似性的简单多边形最近距离计算方法[J]. 测绘学报, 2004, **32**(4): 311 ~ 318.]

7 Zhou Zhi-ping, Wu Jie-yi, Zhang Sa-bing, *et al*. Simple polygon distance algorithm based on monotone chains[J]. Computer Applications Study, 2007, (1): 136 ~ 139. [周之平,吴介一,张飒兵等. 基于单调链的简单多边形距离算法[J]. 计算机应用研究, 2007, (1): 136 ~ 139.]

8 Chazelle B. Triangulating a simple polygon in linear time[J]. Discrete Computer Geometry, 1991, **6**(5): 485 ~ 524.

9 Amato Nacy M, Goodrich Michael T, Ramos Edgar A. A randomized algorithm for triangulating a simple polygon in linear time[A]. In: Proceedings of The Sixteenth ACM Symposium on Computational Geometry[C], Hong Kong, China, 2000: 201 ~ 212.

10 De Berg M, Van Kreveld M, Overmars M, *et al*. (Deng Jun-hui Translate). Computational Geometry Algorithems and Applications (Seconde Edition)[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005. [De Berg M, Van Kreveld M, Overmars M, 等著(邓俊辉 译). 计算几何—算法与应运(第二版)[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.]